

2-3 класс

1. Чтобы поставить забор с боковой стороны земельного участка, фермеру понадобилось вкопать 25 столбов через каждые 150 сантиметров. Какой длины получился забор? Ответ дайте в метрах.

Решение:

Забор можно установить лишь между двумя соседними столбами.

Получается, что последний столб не имеет пары, значит, количество секций забора:

$$1) 25 - 1 = 24$$

Определим длину забора:

$$2) 24 \times 150 = 3600 \text{ (сантиметров)} = 36 \text{ (метров)}$$

Ответ: 36

2. На какое число надо разделить 87912, чтобы получилось тоже пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке?

Решение: $87912 : x = 21978$

$$x = 4$$

Ответ: 4

3. 1 резинка, 2 карандаша и 3 блокнота стоят 38 руб. 3 резинки, 2 карандаша и 1 блокнот стоят 22 руб. Сколько рублей стоит комплект из резинки, карандаша и блокнота?

Решение: 1) $38 + 22 = 60$ (руб) — 4 комплекта 2) $60 : 4 = 15$ (руб) — 1 комплекта

Ответ: 15

4. Три поросёнка поймали 32 пескаря и стали варить уху. Ниф-Ниф отдал для ухи 4 рыбки, Наф-Наф -7, Нуф-Нуф-12. После этого у них осталось рыбок поровну. Сколько пескарей поймал Ниф-Ниф?

Решение:

$$1) 4 + 7 + 12 = 23 \text{ пескаря отдали на уху}$$

$$2) (32 - 23) : 3 = 3 \text{ пескаря осталось у каждого}$$

$$3) 3 + 4 = 7 \text{ пескарей у Ниф-Нифа}$$

Ответ: 7

5. Сколько различных прямоугольников с периметром 20 см можно построить, если сторона прямоугольника — натуральное число сантиметров..

Решение:

прямоугольники со сторонами 1) 9 см и 1 см, 2) 8 см и 2 см, 3) 7 см и 3 см, 4) 6 см и 4 см, 5) 5 см и 5 см.

Ответ: 5

6. – Я на два года старше льва, –

Сказала мудрая сова,

– А я в два раза младше вас, –

Сове ответил дикобраз.

Лев на него взглянул и гордо

Промолвил, чуть поморщив нос:

«Я старше на четыре года,

Чем вы, почтенный иглонос».

Сколько всем им вместе лет?

Решение:

x лет -льву

$x + 2$ - сове

$(x + 2) : 2$ - дикобразу, а так же по условию ему $x - 4$, т.к. лев его старше на 4 года :

$$1) x - 4 = (x + 2) : 2$$

$$2x - 8 = x + 2$$

$$2x - x = 2 + 8$$

$$x = 10 \text{ лет - льву}$$

$$2) 10 + 2 = 12 \text{ лет - сове}$$

$$3) 10 - 4 = 6 \text{ лет -дикобразу (или иглоносу)}$$

$$4) 10 + 12 + 6 = 28 \text{ лет -им всем троим вместе}$$

Ответ: 28

7. Расшифруй комбинацию
кодового замка:

- а) третья цифра на 3 больше, чем первая,
- б) вторая цифра на 2 больше, чем четвертая,
- в) сумма всех цифр равна 17,
- г) вторая цифра 3.



© dreamstime.com

ID 179903833 © Bilderberg

Решение:

1) Выясним, какая четвертая цифра кодового замка, если она на 2 меньше, чем вторая цифра, а второй цифрой является число 3. Находим четвертую цифру $3 - 2 = 1$ - четвертая цифра

2) Узнаем, какая сумма второй и четвертой цифры, если второй является цифра 3, а четвертой цифра 1.

$$3 + 1 = 4.$$

3) Узнаем, какая сумма первой и третьей цифры кода, если все цифры кода дают в сумме 17, а сумма второй и четвертой цифры 4.

$$17 - 4 = 13.$$

4) Узнаем первую цифру.

$$X + X + 3 = 13;$$

$$2X = 13 - 3;$$

$$X = 10 : 2;$$

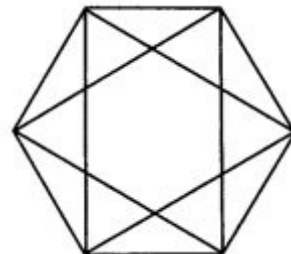
$$X = 5.$$

5) Узнаем третью цифру.

$$5 + 3 = 8.$$

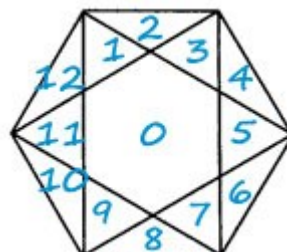
Ответ: 5381

8. Сосчитайте, сколько треугольников на рисунке?



Решение:

1. Пронумеруем маленькие треугольники:



2. Маленьких пронумерованных треугольников - 12 шт.

3. Треугольников, которые получаются из 2-х маленьких: 1-2, 2-3, ... 12-1.

Получается еще 12 шт.

4. Треугольников, которые получаются из 3-х маленьких: 2-3-4, 4-5-6, ... 12-1-2.

Еще 6 шт.

5. Больших треугольников в центре из 3-х маленьких и фигуры в центре: 1-5-9-

0, 3-7-11-0. Еще 2 шт.

$$12 + 12 + 6 + 2 = 32$$

Ответ: 32

4 - 5 класс

1. Маугли попросил пятерых обезьян принести ему орехи. Обезьяны набрали орехов поровну и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате они принесли орехов вдвое меньше, чем собрали. Сколько орехов получил Маугли?

Решение:

1) Каждая из обезьян бросила по 4 ореха. Так как обезьян было 5, следовательно $5-1=4$ (в саму себя же не бросала).

2) Из этого делаем вывод, что обезьяны разбросали 20 орехов - 4 ореха бросила каждая, а всего обезьян было 5, следовательно

$$4*5 = 20.$$

3) Маугли получил столько же, сколько было разбросано обезьянами, так как в условии сказано, что было принесено вдвое меньше собранного.

Изначально было собрано $20(\text{разбросанных}) * 2(\text{было собрано вдвое больше}) = 40$ орехов.

Ответ: 20

2. Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные не могут вытащить репку, а вместе с Мышкой – могут. Сколько мышек надо собрать вместе, чтобы эти мышки смогли вытащить репку сами?

**Решение.**

Кошка = 6 мышек; жучка = 5 кошек = 30 мышек; внучка = 4 жучки = 120 мышек; бабка = 3 внучки = 360 мышек; дедка = 2 бабки = 720 мышек.

Все вместе дедка+бабка+внучка+жучка+кошка+мышка=
 $720+360+120+30+6+1=1237$ мышек.

Ответ: 1237

3. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, и сумма лет Ани и Веры делится на 3. В ответ запишите шестизначное число, которое получится, если записать подряд возраст всех детей в алфавитном порядке по именам детей.

Решение.

5 лет - возраст ребёнка детского сада. Самый младший ребёнок - девочка в возрасте 5 лет.

Зная, что Аня старше Бори, получаем, что Ане либо 13, либо 15 лет.

Так как сумма лет Ани и Веры делится на 3, то получаем три случая:

1. Ане 15 лет, Вере 5 лет. $15+5=20$, не делится на 3.

2. Ане 15 лет, Вере 8 лет. $15+8=23$, не делится на 3.

3. Ане 13 лет, Вере 5 лет. $13+5=18$, делится на 3.

Значит, Боре-8 лет, Гале-15 лет.

Ответ: 138515.

4. Комнаты отеля пронумерованы тремя цифрами. Первая цифра обозначает этаж, а следующие две – номер комнаты. Например, 125 означает 25 -ую комнату на первом этаже. В отеле 5 этажей, они пронумерованы от 1 до 5, с 35 комнатами, пронумерованными от 101 до 135 на первом этаже и аналогичным образом – на остальных. Сколько раз при нумерации комнат использовали цифру 2?

Решение:

1) На каждом этаже двойка четырежды использовалась для нумерации единиц, и десять раз – в десятках.

2) К тому же, номера второго этажа дают ещё 35 двоек.

$$14 \times 5 + 35 = 105$$

Ответ: 105.

5. В ребусе разным буквам соответствуют разные цифры. Решите ребус. В ответе запишите получившуюся сумму.

$$\begin{array}{r} \text{ДРАМА} \\ + \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$$

Решение:

$D \leq 4$.

В разряде сотен имеем $A + A = A$, значит, $A = 0$ (без перехода) или $A = 9$ (с переходом). Значение $A = 0$ не подходит, так как в разряде единиц $A + A = P$ (получаем $A = P = 0$). Значит, $A = 9$, $P = 8$, $E = 7$.

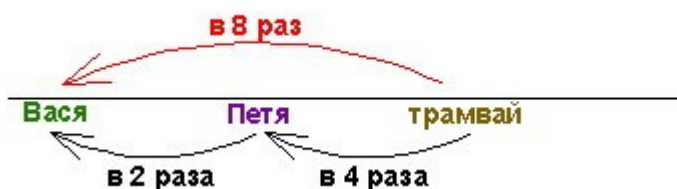
Тогда $2M + 1 = 10 + T$, $T < 9$, значит $M = 5$ или 6 (так как получается переход), а значения 7 и 8 уже заняты буквами E и P . При $M = 6$ получается решение:
 $18969 + 18969 = 37938$.

Ответ: 37938.

6. Петя в трамвае заметил Васю, который поравнялся с трамваем, следуя вдоль трамвайных путей в противоположном направлении. Через минуту Петя вышел и побегал вдогонку за Васей вдвое быстрее Васи, но в 4 раза медленнее трамвая. Через какое время (в минутах) Петя догонит Васю?

Решение:

1. «в два раза быстрее» - это значит, что скорость больше в два раза. А поэтому в два раза больше будет пройденное расстояние (не важно, за какое время). Тогда, если Петя идет в два раза быстрее Васи и в 4 раза медленнее трамвая, то Вася проходит за минуту в $4 \cdot 2 = 8$ раз меньшее расстояние, чем трамвай.



2. Поэтому если за одну минуту Вася проходит какой-то отрезок пути, то трамвай проезжает 8 таких отрезков. Поэтому расстояние между мальчиками в момент выхода Пети составляет 9 отрезков. За ту же минуту Петя проходит 2 отрезка (раз его скорость в 2 раза больше). Введем единицу измерения длины, равную этому же отрезку. Тогда мы имеем стандартные начальные данные для самой обычной задачи на скорость сближения. Скорости мальчиков известны – это 1 (отрезок/мин) и 2 (отрезка/мин), а расстояние для сближения составляет 9 отрезков.

3. За каждую минуту оно сокращается на $2-1=1$ отрезок (это и есть скорость сближения).

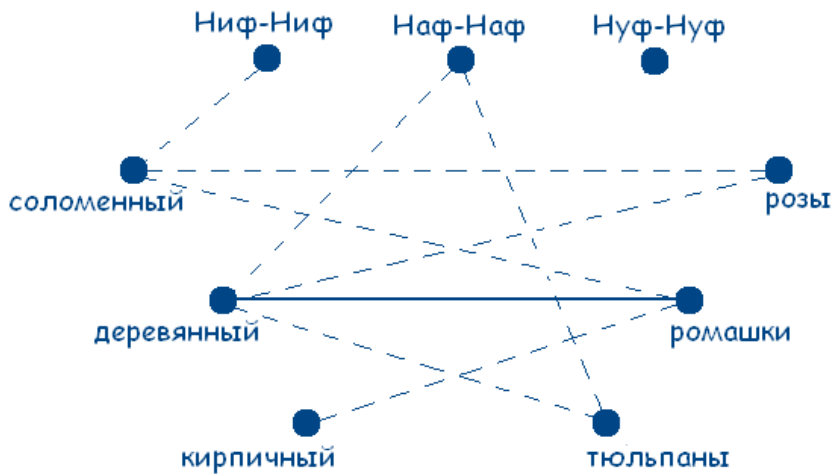
4. А нам надо узнать, за какое время расстояние в 9 отрезков сократится до нуля, то есть надо узнать время сближения. Его можно найти, разделив путь сближения на скорость сближения. Поэтому $9: 1=9$ минут.

Ответ: 9

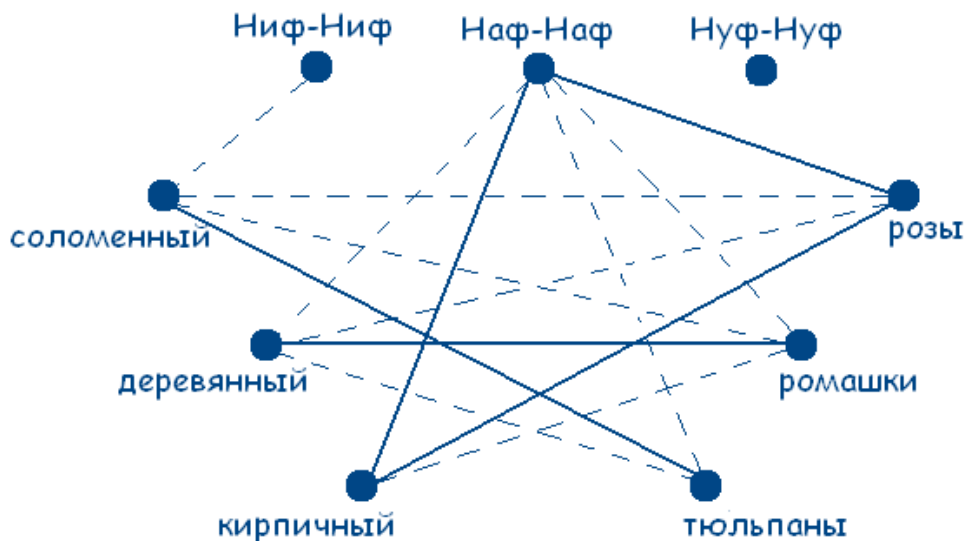
7. Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Построили они три домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Возле каждого домика либо розы, либо ромашки, либо тюльпаны. Известно, что Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном; возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки. У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их. Узнайте, кто в каком домике живет Нуф-Нуф. Если он живет в соломенном доме, то в ответ запишите 1, если в деревянном - 2, если в кирпичном - 3.

Решение:

Из условий задачи получаем граф:



Можно сделать вывод, что возле кирпичного домика растут розы, а возле соломенного – тюльпаны. А так как Наф-Наф живет не в деревянном домике, то он и не выращивает ромашки. А так как на тюльпаны у него аллергия, то он может выращивать только розы. Внесем эти данные в чертеж и получим:



Теперь стало ясно и то, что Ниф-Ниф живет в деревянном домике и выращивает ромашки. Методом исключения получаем, что Нуф-Нуф живет в соломенном домике и выращивает тюльпаны.

Ответ: 1

8. Котенок Малыш может облизать себя с головы до кончика хвоста за полчаса, а кот Тоша может облизать Малыша за 5 минут. Себя Тоша способен помыть за 20 минут. Сколько времени в часах придется трудиться Малышу, чтобы помыть Тошу?



Решение:

1) $30\text{мин} : 5\text{мин} = 6$ - Малыш облизывает сам себя в 6 раз медленнее, чем его облизывает кот Тоша.

2) $20\text{мин} \cdot 6 = 120\text{мин} = 2\text{часа}$ - Малыш облизет кота Тошу

Ответ: 2 часа

6-7 класс

1. Школа Пифагора. Тиран острова Самос Поликрат однажды спросил у Пифагора, сколько у того учеников. “Охотно скажу тебе, о Поликрат, - отвечал Пифагор. – Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны вечной природы, седьмая часть молча упражняет силу духа, храня в сердце учение. Добавь ещё к ним трех юношей, из которых Теон превосходит прочих своими способностями. Столько учеников веду я к рождению вечной истины”. Сколько учеников ведёт к рождению вечной истины Пифагор?

Решение:

Пусть у Пифагора было x учеников. Составим и решим уравнение:

$$x/2 + x/4 + x/7 + 3 = x$$

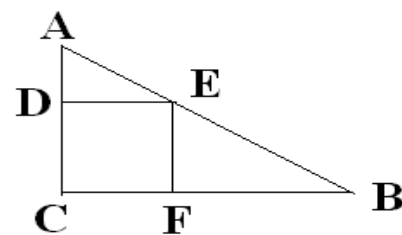
$$14x + 7x + 4x + 84 = 28x$$

$$3x = 84$$

$$x = 28.$$

Ответ: 28

2. В прямоугольный треугольник с катетами 2см и 6см вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата в сантиметрах.

**Решение:**

Обозначим сторону квадрата за x .

Треугольники ADE и EFB подобны по двум углам

Составим уравнение: $(2 - x) : x = x : (6 - x)$ $x = 1,5(\text{см})$.

$$P = 4 * 1,5 = 6 (\text{см}).$$

Ответ: 6

3. Даны три натуральных числа. Для каждой двух из них вычислили наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Полученные шесть чисел сложили. Могло ли получиться число 12345? В ответе запишите 1- если ответ «да», 0 — если ответ «нет»

Решение.

1. НОД и НОК четных чисел число чётное, а нечётных – нечётное. НОД четного и нечётного чисел – нечётное число, и их НОК – чётное число. Перебирая все случаи (три чётных числа; два чётных, одно нечётное; одно чётное, два нечётных; три нечётных), приходим к выводу, что сумма чисел, о которых говорится в условии задачи, чётна.

Ответ: 0

4. Два парома одновременно отходят от противоположных берегов реки и пересекают её перпендикулярно берегам. Скорости паромов постоянны, но не равны. Паромы встречаются на расстоянии 720 метров от берега, после чего продолжают движение. На обратном пути они встречаются в 400 метрах от другого берега. Какова ширина реки?

Решение

Суммарное расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, равно ширине реки, а расстояние, пройденное к моменту второй встречи равно утроенной ширине реки. Следовательно, до второй встречи каждый из паромов прошел втрое большее расстояние, чем до первой встречи. Так как один из паромов до первой встречи прошёл 720 м, то до второй встречи он прошёл расстояние

$$1) 720 \cdot 3 = 2160 \text{ (м.)}$$

При этом он прошёл путь, равный ширине реки, и ещё 400 м.

$$2) 2160 - 400 = 1760 \text{ (м.) - ширина реки}$$

Ответ: 1760 м

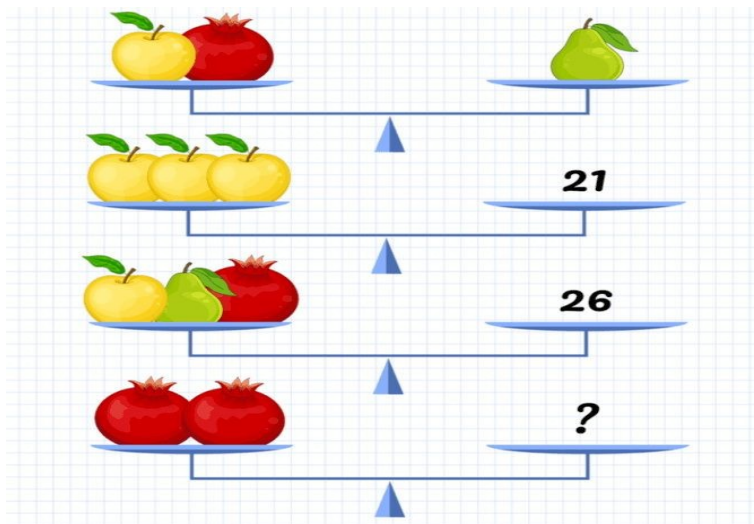
5. На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1, 2, 3, ..., 16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах? Ответ обоснуйте.

Решение

Поскольку в каждый момент времени массы на чашах весов отличались хотя бы на 1 грамм, то для того, чтобы перевесила противоположная чаша, необходимо забрать гирю массой не менее двух грамм. Следовательно, выходя из класса, ни один ученик не мог забрать гирю массой 1 грамм.

Ответ: 1

6. Продавец фруктов решил взвесить яблоки, гранаты и грушу. На первую чашу весов он поставил яблоко и гранат, а на вторую – грушу, и обе чаши весов сравнялись. Затем он взвесил три яблока, и весы показали цифру 21. Потом продавец взвесил все три фрукта вместе, и весы показали 26. Какую цифру показали весы, когда продавец взвесил два граната?



Решение:

1. Смотрим на первую строчку. Когда продавец положил яблоко и гранат на первую чашу весов, а грушу – на вторую, весы достигли равновесия. Это значит, что вес груши равен весу яблока и граната, вместе взятых.

2. Смотрим на вторую строчку. Если три яблока весят 21 единицу, то одно яблоко весит 7 единиц: $21 : 3 = 7$.

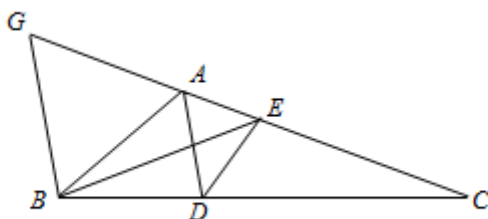
3. Смотрим на третью строчку. Если мы заменим яблоко и гранат на одну грушу (из п.1 мы помним, что они равны по весу), мы узнаем, что две груши весят 26 единиц. $26 : 2 = 13$ Следовательно, одна груша весит 13 единиц.

4. Теперь мы можем узнать, сколько единиц весит один гранат. Мы знаем, что вес груши равен весу яблока и граната, вместе взятых. Если груша весит 13 единиц, а одно яблоко – 7, то один гранат весит 6 единиц ($13 - 7 = 6$).

5. Смотрим на последнюю строчку. Когда продавец взвесил два граната, весы показали цифру 12, потому что $6 + 6 = 12$.

Ответ: 12

7. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE . Известно, что DE – биссектриса угла ADC . Найдите градусную величину угла A .



Решение:

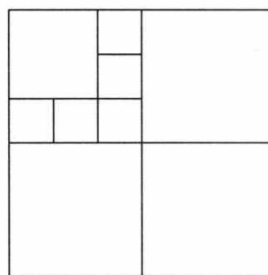
Проведём через вершину B прямую, параллельную AD , до пересечения с прямой AC в точке G . $\angle GBA = \angle BAD = \angle DAE = \angle BGC$, то есть треугольник BAG равнобедренный ($AB = AG$). Биссектриса делит противоположающую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Применяя это свойство к биссектрисам DE и BE , получим $DA : DC = AE : EC = BA : BC$. Но $DA : DC = BG : BC$ (треугольники ACD и GCB подобны). Значит, $BA = BG$ и треугольник BAG – равносторонний. Поэтому $\angle BAG = 60^\circ$.

Ответ: 60

8. Можно ли квадрат разрезать на 9 квадратов и раскрасить их так, чтобы получились 1 белый, 3 синих и 5 красных квадратов, причём квадраты одинакового цвета были одинакового размера, а квадраты разного цвета – разного размера? Если да, то в ответе ставим — 1, если нет, то в ответе ставим — 0.

Решение

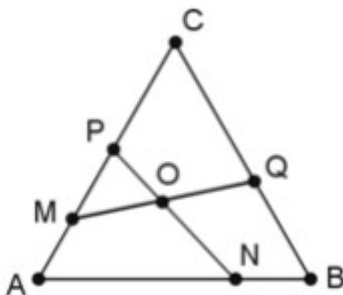
Пример требуемого разрезания



Ответ: 1

8-9 класс

1. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a точки M, N, P, Q расположены так, как показано на рисунке. Известно, что $MA + AN = PC + CQ = a$. Найдите градусную величину угла NOQ .



Решение

По условию задачи $AN = a - AM$, следовательно, $AN = MC$.

Аналогично $AP = QC$. Из этих равенств и равенства $\angle A = \angle C = 60^\circ$ следует, что $\triangle ANP = \triangle CMQ$. Отсюда $\angle ANP = \angle QMC$, $\angle APN = \angle MQC$. По теореме о сумме углов треугольника $\angle ANP + \angle APN = 120^\circ$, поэтому $\angle OMP + \angle OPM = 120^\circ$, а значит, $\angle MOP = 60^\circ$. Углы MOP и NOQ вертикальные, поэтому $\angle NOQ = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

2. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента времени T ?

Решение. Рассмотрим момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x . Значит, сумма баллов стала равна nx . Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx + y = (n+1)(x-1)$, откуда $y = x - n - 1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8. С каждым

следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5. Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при 1 проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

Ответ. 5.

3. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?

Решение:

Пусть на вечере было p супружеских пар и d детей (из условия, d меньше или равно $10p$). Тогда каждый ребёнок состоял в $(p - 1)(p - 2)$ тройках: маму можно было выбрать из одной из $(p - 1)$ супружеских пар, а при зафиксированном выборе мамы папу можно было выбрать из одной из $(p - 2)$ оставшихся пар. Значит, общее количество троек равно $d \cdot (p - 1)(p - 2) = 3630$.

Поскольку d меньше или равно $10p$, получаем 3630 меньше или равно $10p^3$, то есть $p^3 > 363 > 7^3$. Значит, $p > 8$.

Число $3630 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^2$ имеет два делителя $p - 1$ и $p - 2$, отличающиеся на 1. Если один из этих делителей делится на 11, то другой даёт остаток 1 или 10 при делении на 11. Тогда он взаимно прост с 11, а значит, он делит $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ и при этом не меньше 10. Этим делителем может быть только 10; тогда $p - 2 = 10$, $p - 1 = 11$ и $d = 3630 : 110 = 33$.

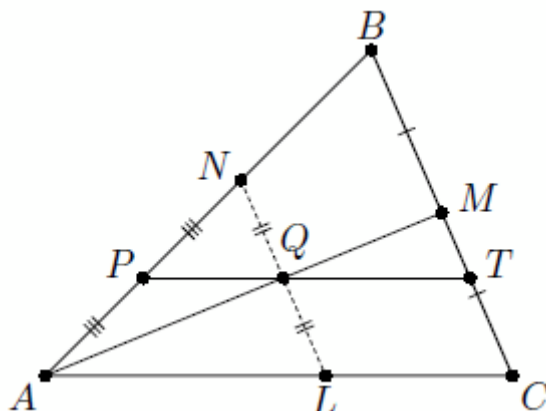
Если же оба числа $(p - 2)$ и $(p - 1)$ не делятся на 11, то число $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ делится на их произведение; это противоречит тому, что $p > 8$.

Ответ. 10

4. Дан треугольник ABC . Прямая, параллельная AC , пересекает стороны AB и BC в точках P и T соответственно, а медиану AM — в точке Q . Известно, что $PQ = 3$, а $QT = 5$. Найдите длину AC .

Решение:

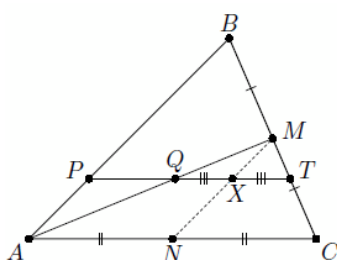
Первый способ.



Проведем через точку Q прямую, параллельную BC (N и L — точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC соответственно). Поскольку AM — медиана треугольника ABC , то $LQ = NQ$, кроме того, PT параллельно AC , то есть, PQ — средняя линия в треугольнике ANL . Тогда $AL = 2PQ = 6$. Кроме того, QL параллельна TC и QT параллельна LC , следовательно, $LQTC$ — параллелограмм, откуда $LC = QT = 5$.

Таким образом, $AC = AL + LC = 6 + 5 = 11$.

Второй способ.



Проведем среднюю линию MN в треугольнике ABC . Поскольку QT параллельно AC , то QT делится отрезком MN пополам. Из подобия треугольников APQ и MXQ получим, что $AQ : QM = 3 : 2,5 = 6 : 5$. Тогда $MQ : AM = 5 : 11$, откуда $QT : AC = 5 : 11$, то есть $AC = 11$.

Ответ: 11

5. Автомобиль едет сначала 2 мин с горы, а затем 6 мин в гору. Обратный путь он проделывает за 13 мин. Во сколько раз скорость автомобиля при движении с горы больше, чем скорость при движении в гору? (Считайте, что скорость при движении с горы (в гору) одинакова в обоих направлениях.)

Решение

Пусть скорость автомобиля при движении с горы равна x км/мин, а при движении в гору - y км/мин. Тогда на пути туда автомобиль едет с горы $2x$ км, а в гору - $6y$ км. На обратном пути расстояние $6y$ км (т.е. путь с горы) автомобиль преодолевает за $6y/x$ мин, а расстояние $2x$ км (т.е. путь в гору) – за $2x/y$ мин. Всего обратный путь занимает 13 мин. Получаем уравнение:

$$6y/x + 2x/y = 13.$$

Введем замену $x/y = t$,

получим уравнение с одной переменной: $2t + 6/t = 13$.

Решив его, найдем, $t_1 = 6$, $t_2 = 0,5$.

Так как скорость автомобиля при движении с горы больше, чем при движении в гору, то подходит только корень $t_1 = 6$

$$x/y = 6.$$

Ответ: 6

6. Корни двух приведённых квадратных трёхчленов – отрицательные целые числа, причём один из этих корней – общий. Могут ли значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98? Если докажете, что «да», то в ответе запишите — 1, если докажете, что «нет», то в ответе запишите — 0.

Решение

Пусть x_1 – общий корень рассматриваемых трёхчленов, x_2 и x_3 – два других (различных) корня. Тогда один из трёхчленов равен $(x - x_1)(x - x_2)$, а другой – $(x - x_1)(x - x_3)$.

Допустим, при каком-то натуральном n выполнены равенства

$$(n - x_1)(n - x_2) = 19 \quad \text{и} \quad (n - x_1)(n - x_3) = 98.$$

Тогда целое число $(n - x_1)$ должно быть общим делителем взаимно простых чисел 19 и 98 и, значит, должно равняться 1 или -1 . Но в обоих случаях

$x_1 \geq n - 1 \geq 0$, что противоречит условию. Следовательно, значения этих трёхчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98 не могут.

Ответ: 0

7. Кооператив получает яблочный и виноградный сок в одинаковых бидонах и выпускает яблочно-виноградный напиток в одинаковых банках. Одного бидона яблочного сока хватает ровно на 6 банок напитка, а одного бидона виноградного – ровно на 10. Когда рецептуру напитка изменили, одного бидона яблочного сока стало хватать ровно на 5 банок напитка. На сколько банок напитка хватит теперь одного бидона виноградного сока? (Напиток водой не разбавляется.)

Первый способ. Оценим, какую часть одного бидона составляет объем одной банки. По условию, на 1 банку напитка уходит $1/6$ бидона яблочного и $1/10$ бидона виноградного сока, значит объем банки равен $1/6 + 1/10 = 4/15$ объема бидона.

Пусть после изменения рецептуры x банок наполнится из 1 бидона виноградного сока. На банку напитка теперь уходит $1/5$ бидона яблочного и $1/x$ бидона виноградного сока. Получим уравнение:

$$1/5 + 1/x = 4/15$$

$$1/x = 4/15 - 1/5$$

$$1/x = 1/15$$

$$x = 15$$

Второй способ.

$$\text{НОК}(5,6,10) = 30$$

На 30 банок было затрачено $30/6 = 5$ бидонов яблочного и $30/10 = 3$ бидона виноградного сока. Объем 30 банок равен объему 8 бидонов.

По новой рецептуре на 30 банок необходимо $30/5 = 6$ бидонов яблочного сока.

Значит, виноградного сока на 30 банок затратят $8 - 6 = 2$ бидона. Итак, 1 бидона виноградного сока хватит на $30/2 = 15$ банок.

Ответ: 15

8. М.В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас.

Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

Если хватит, то в ответе запишите — 1, если нет, то в ответе запишите — 0.

Решение

Пусть x - начальная цена хлеба, а y - нач. цена кваса.

$$20\% = 0.2$$

После того, как цены выросли на 20%, то цена хлеба стала $1,2x$, кваса $1,2y$

Составим уравнение:

$$x + y = 1,2x + 1,2y$$

$$x - 0,6x = 1,2y - y$$

$$0,4x = 0,2y$$

$$x = 0,2y : 0,4$$

$$x = 0,5y$$

$$0,5y + y = 1,5y \text{ - денежка.}$$

$$\text{Выразим цену кваса: } 0,5y + y = 1,5y$$

Значит, если цены вырастут ещё на 20%, то цена кваса будет

$$(1 + 0,2) * 1,2y = 1,44y$$

Так как $1,44 < 1,5$ то Ломоносову хватит денежки на квас.

Ответ: 1