



Олимпиада по математике 2 – 3 класс



1. Запиши все двузначные числа, используя цифры 1, 2, 3 (цифры в записи числа не должны повторяться). В ответе запиши сумму этих чисел.



2. Из Москвы поезд выехал в полночь, а в 8 часов прибыл на станцию назначения. В 9 часов он отправился обратно. В котором часу поезд вернется в Москву, если считать, что скорость поезда остается постоянной?



3. Трем Толстякам принесли 30 пирожных, поровну каждому. Первый Толстяк съел несколько пирожных, второй съел столько, сколько пирожных осталось у первого, а третий съел столько пирожных, сколько первый и второй вместе. Сколько всего пирожных осталось и Трех Толстяков?



4. Решите ребус.

$$\begin{array}{r} \text{Т} \quad \text{Р} \quad \text{Ю} \quad \text{К} \\ + \\ \text{Т} \quad \text{Р} \quad \text{Ю} \quad \text{К} \\ \text{Ц} \quad \text{И} \quad \text{Р} \quad \text{К} \end{array}$$

Каждую букву замените цифрой так, чтобы получилось верное арифметическое равенство. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. Известно, что буква **Ю** обозначает цифру **6**. В ответ запишите, чему равна сумма.

5. Четверо друзей соревновались в запуске на дальность бумажных самолетиков. Каждый из них занял соответственно 1, 2, 3 и 4 места. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: Я был вторым, Боря - третьим.

Вася: Я был вторым, Андрей – первым.

Гриша: Я был вторым, Боря – четвертым.

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорит правду, а один раз – неправду. Определить, кто какое место занял. В ответ записать какое место занял Василий.



6. Роман и Федор — два брата. У них вместе 100 марок. В день рождения Федора Роман подарил ему 20 марок, и у них стало одинаковое количество марок. Сколько марок было у Федора до этого?



7. Размен по две и три копейки (старинная задача).

Определите, как разменять 59 копеек пятнадцатью монетами по 3 и 5 копеек. В ответе укажите, сколько потребуется пятикопеечных монет.



8. Из книги выпал кусок. Первая страница куска имеет номер 143, а номер последней страницы куска написан теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц книги выпало?





Решения и ответы:

1. Запиши все двузначные числа, используя цифры 1, 2, 3 (цифры в записи числа не должны повторяться) и найди сумму этих чисел.



Решение.

Переберем все возможные числа, удовлетворяющие этому условию. Т.к. на первой позиции может стоять одна из трех цифр, а на второй при этом одна из оставшихся двух, то таких чисел всего шесть.

$$12 + 13 + 21 + 23 + 31 + 32 = 132.$$

Ответ: 132.

2. Из Москвы поезд выехал в полночь, а в 8 часов прибыл на станцию назначения. В 9 часов он отправился обратно. В котором часу поезд вернется в Москву, если считать, что скорость поезда остается постоянной?



Решение.

Известно, что из Москвы поезд выехал в полночь, а в 8 часов прибыл на станцию назначения. Следовательно, он был в пути 8 часов. В 9 часов он отправился обратно, известно, что скорость поезда остается постоянной. Значит, поезд прибедет в Москву в $9+8=17$ часов.

Ответ: 17.

3. Трем Толстякам принесли 30 пирожных, поровну каждому. Первый Толстяк съел несколько пирожных, второй съел столько, сколько пирожных осталось у первого, а третий съел столько пирожных, сколько первый и второй вместе. Сколько всего пирожных осталось и Трех Толстяков?



Решение.

Трем Толстякам принесли 30 пирожных, поровну каждому, следовательно, каждому досталось по 10 пирожных.

Первый Толстяк съел несколько пирожных, а второй съел столько, сколько пирожных осталось у первого. Следовательно, количество пирожных, которое съели первый и второй Толстяки вместе, равно количеству пирожных, которое досталось первому из них, т.е. 10 пирожных.

Третий Толстяк съел столько пирожных, сколько первый и второй вместе. Следовательно, он съел тоже 10 пирожных.

Таким образом Три Толстяка вместе съели $10+10=20$ пирожных, и у них осталось $30-20=10$ пирожных.

Ответ: 10.

4. Решите ребус.

Т Р Ю К

+

Т	Р	Ю	К
Ц	И	Р	К

Каждую букву замените цифрой так, чтобы получилось верное арифметическое равенство. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры. Известно, что буква **Ю** обозначает цифру **6**. В ответ запишите, чему равна сумма.

Решение.

- Для удобства объяснения под суммой цифр будем понимать сумму чисел, которые эти цифры обозначают.

В ребусе буква **Ю** обозначает цифру **6**. Букву **К** можно заменить только на **0**, т.к. сумма двух одинаковых цифр оканчивается на ту же цифру. На этом шаге ребус будет выглядеть так:

	Т	Р	6	0
+				
	Т	Р	6	0
	Ц	И	Р	0

Далее расшифровка ребуса идет в таком порядке: буква **Р** обозначает цифру **2**, т.к. $6+6=12$. Тогда **И** – цифру **5**. На этом шаге ребус будет выглядеть так:

	Т	2	6	0
+				
	Т	2	6	0
	Ц	5	2	0

Очевидно, что буква **Т** может быть заменена только на цифру которая меньше 5, т.к. при сложении нет перехода. При этом цифра 2 уже используется; 1 быть не может, т.к. при сложении будет 2, а эта цифра уже используется. По аналогичной причине это не 3. Тогда, остается **4**, и значит, буква **Ц** обозначает цифру **8**. Ребус расшифрован полностью.

$$\begin{array}{r} 4260 \\ + \\ 4260 \\ \hline 8520 \end{array}$$

Ответ: 8520.

5. Четверо друзей соревновались в запуске на дальность бумажных самолетиков. Каждый из них занял соответственно 1, 2, 3 и 4 места. На вопрос, какое каждый из них занял место, они ответили:

Андрей: Я был вторым, Боря - третьим.

Вася: Я был вторым, Андрей – первым.

Гриша: Я был вторым, Боря – четвертым.

При этом известно, что каждый мальчик один раз говорит правду, а один раз – неправду. Определить, кто какое место занял. В ответ записать какое место занял Василий.



Решение.

Используем таблицы истинности.

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей				
Борис				
Василий				
Григорий				

- 1) Предположим, что Андрей первый раз сказал правду: он занял 2 место, а второй раз неправд, значит, Боря не был третьим.

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей		+		
Борис			-	
Василий				
Григорий				

Тогда Вася первый раз солгал. Он не был вторым, а сказал второй раз правду: Андрей был первым.

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей	+	+		
Борис			-	
Василий		-		
Григорий				

Но Андрей сразу занять первое и второе место не мог.

Следовательно, мы пришли к противоречию. Отсюда следует, что Андрей первый раз сказал неправду, а второй раз – правду.

- 2) Итак, Андрей первый раз сказал неправду, а второй раз – правду. Т.е. Он не занял 2 место, а Боря занял 3 место.

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей		-		
Борис			+	
Василий				
Григорий				

Значит, утверждение Гриши «Боря был четвертым» - неправда, а его утверждение «Я был вторым – правда».

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей		-		
Борис			+	
Василий				
Григорий		+		

Следовательно, утверждение Васи «Я был вторым» - ложь, а его утверждение «Андрей был первым» - правда. Значит, сам Вася был четвертым.

	1 место	2 место	3 место	4 место
Андрей	+	-		
Борис			+	
Василий				+
Григорий		+		

Составим таблицу результатов:

место	имя
1 место	Андрей
2 место	Григорий
3 место	Борис
4 место	Василий

Ответ: 4.

6. Роман и Федор — два брата. У них вместе 100 марок. В день рождения Федора Роман подарил ему 20 марок, и у них стало одинаковое количество марок. Определите, сколько марок было у Романа и Федора до этого. В ответ запишите, сколько марок было у Федора.



Решение.

Если у двух братьев вместе было 100 марок, то изменилось ли это количество после того, как один брат подарил другому 20 марок? Нет. Если у каждого брата после подарка марок стало одинаково, то у каждого стало $100 : 2 = 50$ марок. Если у Романа стало 50 марок, а он отдал брату 20 марок, то у него было $50 + 20 = 70$ марок. Если у Федора стало 50 марок, а получил он от брата 20 марок, то у него было $50 - 20 = 30$ марок.

Ответ: 30.

7. **Размен по две и три копейки** (старинная задача).

Определите, как разменять 59 копеек пятнадцатью монетами по 3 и 5 копеек. В ответе укажите, сколько потребуется пятикопеечных монет.



Решение.

Если бы все 15 монет были бы по 3 копейки, то сумма составляла бы 45 копеек, что на 14 копеек меньше, чем сумма, указанная в условии задачи. Так как замена каждой трехкопеечной монеты пятикопеечной монетой

приводит к увеличению суммы на 2 копейки, то заменить необходимо 7 монет. Итак, необходимо взять 7 пятикопеечных монет и 8 трехкопеечных монет.

Ответ: 7.

8. Из книги выпал кусок. Первая страница куска имеет номер 143, а номер последней страницы куска написан теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц книги выпало?



Решение.

Номер последней страницы выпавшего из книги куска записан цифрами 1, 4, 3 больше числа 143 и оканчивается на четную цифру. Всем этим трем условиям удовлетворяет только число 314. Число выпавших страниц $314 - 143 + 1 = 172$.

Ответ: 172.



Олимпиада по математике 4–5 класс



1. В полдень из Москвы в Тулу выехал автобус с пассажирами. Часом ранее из Тулы в Москву выехал велосипедист и едет по тому же шоссе, но значительно медленнее, чем автобус. Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, кто из них будет дальше от Москвы? Запишите номер верного ответа.

1	Не достаточно данных для решения
2	Пассажиры автобуса будет дальше
3	Велосипедист будет дальше
4	Одинаково

2. **На охоте** (старинная задача).

Пошел охотник на охоту с собакой. Идут они лесом, и вдруг собака увидела зайца. Расстояние от собаки до зайца равно 40 скачкам собаки, а расстояние, которое пробегает собака за 5 скачков, заяц пробегает за 6 скачков. За сколько скачков собака догонит зайца? (В задаче подразумевается, что скачки делаются одновременно и зайцем и собакой.)



3. У одного короля было 7 сыновей, и в старости он завещал им все свои замки. Самому младшему король дал несколько замков, более старший сын получил вдвое больше, чем самый младший, следующий — втрое больше замков, чем самый младший, и т. д., а самый старший сын получил в 7 раз больше, чем самый младший сын. Однако королева подумала, что такое распределение замков несправедливое, и сказала своим сыновьям: «Каждый из вас должен дать по 2 замка каждому из ваших младших братьев, и только младший сын должен оставить у себя все свои полученные замки». В результате каждый из сыновей получил одинаковое количество замков. Чему равна сумма цифр общего числа замков?
4. Всем кошкам нравится запах рыбы. Некоторые кошки слишком толстые. Некоторые слишком толстые кошки прекрасно ловят мышей. Пользуясь этими утверждениями, выберите верные высказывания. В ответ запишите номера верных утверждений в порядке возрастания без пробелов и запятых.



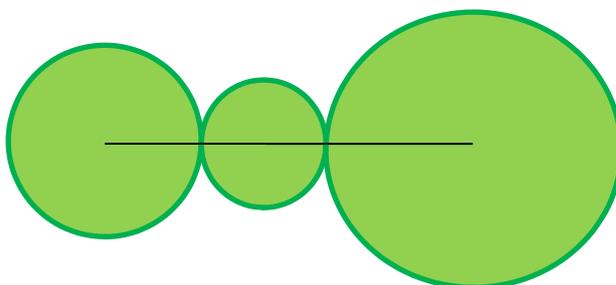
1	Некоторым толстым кошкам не нравится запах рыбы.
2	Всем кошкам, которые прекрасно ловят мышей, нравится запах рыбы.
3	Кошки, которые прекрасно ловят мышей, толстые.
4	Если кошке нравится запах рыбы, то она толстая.
5	Все кошки, которые прекрасно ловят мышей, становятся толстыми, потому что им нравится запах

	рыбы.
6	Среди толстых кошек найдется, хотя бы одна кошка, которая ловит мышей и ей нравится запах рыбы.

5. Из книги выпал кусок. Первая страница куска имеет номер 143, а номер последней страницы куска написан теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц книги выпало.



6. Имеется три клумбы, имеющие форму круга, расположенные так, как показано на рисунке. Каков радиус меньшей клумбы, если сумма длин диаметров всех трех клумб равна 14 м, а расстояние между центрами двух крайних клумб равно 8 м?



7. Решите ребус:

Вместо звездочек необходимо вставить пропущенные цифры так, чтобы получилось верное арифметическое равенство. В ответ записать чему равно делимое.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{---} \quad * \quad * \quad 0 \\
 \quad * \quad * \\
 \hline
 \quad \mathbf{1} \quad * \quad * \\
 \text{---} \quad * \quad 4 \quad * \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 * \quad 5 \\
 \hline
 2 \quad *
 \end{array}
 \end{array}$$

8. Когда отцу было 29 лет, дочери было 5 лет, а сейчас дочери в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них сейчас? В ответ запишите возраст отца.



Решения и ответы:

1. В полдень из Москвы в Тулу выехал автобус с пассажирами. Часом ранее из Тулы в Москву выехал велосипедист и едет по тому же шоссе, но значительно медленнее, чем автобус. Когда пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, кто из них будет дальше от Москвы? Запишите номер верного ответа.

1	Не достаточно данных
2	Пассажиры автобуса будет дальше
3	Велосипедист будет дальше
4	Одинаково

Решение.

Т.к. пассажиры автобуса и велосипедист встретятся, то они будут находиться в момент встречи на одинаковом расстоянии от Москвы.

Ответ: 4.

2. На охоте (старинная задача).

Пошел охотник на охоту с собакой. Идут они лесом, и вдруг собака увидела зайца. Расстояние от собаки до зайца равно 40 скачкам собаки, а расстояние, которое пробегает собака за 5 скачков, заяц пробегает за 6 скачков. За сколько скачков собака догонит зайца?

(В задаче подразумевается, что скачки делаются одновременно и зайцем и собакой.)



Решение.

Согласно условию, если заяц сделает 6 скачков, то и собака сделает 6 скачков. Следовательно, за 6 скачков собака приблизится к зайцу на расстояние, равное одному своему скачку. Поскольку в начальный момент времени расстояние от собаки до зайца равно 40 скачкам собаки, то собака догонит зайца за $40 \times 6 = 240$ скачков.

Ответ: 240.

3. У одного короля было 7 сыновей, и в старости он завещал им все свои замки. Самому младшему король дал несколько замков, более старший сын получил вдвое больше, чем самый младший, следующий — втрое больше замков, чем самый младший, и т. д., а самый старший сын получил в 7 раз больше, чем самый младший сын. Однако королева подумала, что такое распределение замков несправедливое, и сказала своим сыновьям: «Каждый из вас должен дать по 2 замка каждому из ваших младших братьев, и только младший сын должен оставить у себя все свои полученные замки». В результате каждый из сыновей получил одинаковое количество замков. Чему равна сумма цифр общего числа замков?

Решение.

Примем количество замков, доставшихся младшему сыну, за 1 часть. Тогда числа ряда: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 показывают, сколько частей досталось каждому сыну, начиная с младшего. Все наследство сыновей короля составляет $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ частей. После вмешательства королевы каждый из сыновей получил одинаковое количество замков, или $28 : 7 = 4$ части. Младший сын получил от каждого из шести братьев по 2 замка, т. е. количество замков у него увеличилось на $2 \times 6 = 12$ (замков). А количество частей у него увеличилось на $4 - 1 = 3$ части. Следовательно, 1 части соответствует $12 : 3 = 4$ замка, а все наследство составляет $4 \times 28 = 112$ замков. Сумма цифр числа замков (112) равна 4.

Ответ: 1.

4. Всем кошкам нравится запах рыбы. Некоторые кошки слишком толстые. Некоторые слишком толстые кошки прекрасно ловят мышей. Пользуясь этими утверждениями, выберите верные высказывания. В ответ запишите номера верных утверждений в порядке возрастания без пробелов и запятых.



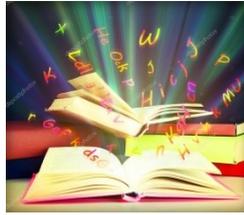
1	Некоторым толстым кошкам не нравится запах рыбы.
2	Всем кошкам, которые прекрасно ловят мышей, нравится запах рыбы.
3	Кошки, которые прекрасно ловят мышей, толстые.
4	Если кошке нравится запах рыбы, то она толстая.
5	Все кошки, которые прекрасно ловят мышей, становятся толстыми, потому, что им нравится запах рыбы.
6	Среди толстых кошек найдется, хотя бы одна кошка, которая ловит мышей и ей нравится запах рыбы.

Решение:

- Первое утверждение не верно, т.к. всем кошкам нравится запах рыбы, т.е. не существует кошки, которой запах рыбы не нравится.
- Второе утверждение верно, т.к. всем кошкам нравится запах рыбы, а значит и тем, которые прекрасно ловят мышей.
- Третье высказывание неверно. Некоторые слишком толстые кошки прекрасно ловят мышей. Но, отсюда не следует, что все кошки, которые прекрасно ловят мышей - толстые.
- Четвертое - не верно, т.к. всем кошкам нравится запах рыбы, а не только толстым.
- Пятое утверждение неверно. Толстыми кошки не становятся от запаха рыбы, запах, рыбы любят любые кошки, в том числе, и не толстые.
- Пятое утверждение верно, как следствие из того, что некоторые слишком толстые кошки прекрасно ловят мышей, и все кошки любят запах рыбы.

Ответ: 25.

5. Из книги выпал кусок. Первая страница куска имеет номер 143, а номер последней страницы куска написан теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц книги выпало.

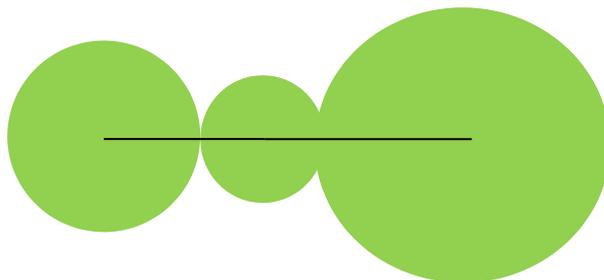


Решение.

Номер последней страницы выпавшего из книги куска записан цифрами 1, 4, 3 больше числа 143 и оканчивается на четную цифру. Всем этим трем условиям удовлетворяет только число 314. Число выпавших страниц $314 - 143 + 1 = 172$.

Ответ: 172.

6. Имеется три клумбы, имеющие форму круга, расположенные так, как показано на рисунке. Каков радиус меньшей клумбы, если сумма длин диаметров всех трех клумб равна 14 м, а расстояние между центрами двух крайних клумб равно 8 м?



Решение.

Как известно, диаметр круга состоит из двух радиусов. Т.к. сумма длин диаметров всех трех клумб равна 14 м, то $14 : 2 = 7$ м – сумма радиусов всех трех клумб.

Известно, что расстояние между центрами двух крайних клумб равно 8 м. Но это расстояние состоит из радиусов двух крайних кругов двух

радиусов среднего круга. Тогда, $8 - 7 = 1$ м – радиус одного среднего круга.

Ответ: 1.

7. Решите ребус:

Вместо звездочек необходимо вставить пропущенные цифры так, чтобы получилось верное арифметическое равенство. В ответ записать чему равно делимое.

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \quad * \quad * \quad 0 \quad | \quad * \quad 5 \\
 \quad \quad * \quad * \quad \quad | \quad 2 \quad * \\
 \hline
 \quad \quad \mathbf{1} \quad * \quad * \\
 \text{---} \quad * \quad 4 \quad * \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Решение.

- Заметим, что делимое оканчивается на ноль, а деление выполнено без остатка. Получим первый шаг:

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \quad * \quad * \quad 0 \quad | \quad * \quad 5 \\
 \quad \quad * \quad * \quad \quad | \quad 2 \quad * \\
 \hline
 \quad \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{0} \\
 \text{---} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{0} \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

- Число 140 должно делиться без остатка на некое двузначное число, оканчивающееся цифрой 5.

$$\begin{array}{r}
 \text{---} \quad * \quad * \quad 0 \quad | \quad * \quad 5 \\
 \quad \quad * \quad * \quad \quad | \quad 2 \quad * \\
 \hline
 \quad \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{0} \\
 \text{---}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Такое число одно. Это число 35. Получим:

$$\begin{array}{r} \hline * \quad * \quad 0 \quad | \quad 3 \quad 5 \\ * \quad * \quad \quad | \quad 2 \quad * \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

- При делении 140 на 35 в частном получается число 4.

$$\begin{array}{r} \hline * \quad * \quad 0 \quad | \quad 3 \quad 5 \\ * \quad * \quad \quad | \quad 2 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

- Таким образом, в ребусе делитель равен 35, а частное 24. Отсюда находим делимое:

$$\begin{array}{r} \hline 8 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 3 \quad 5 \\ 7 \quad 0 \quad \quad | \quad 2 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

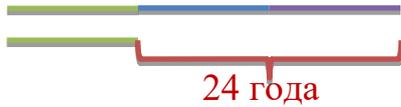
Ответ: 840.

8. Когда отцу было 29 лет, дочери было 5 лет, а сейчас дочери в три раза меньше лет, чем отцу. Сколько лет каждому из них сейчас? В ответ запишите возраст отца.

Решение.

С годами разница в возрасте между отцом и дочерью не меняется, и она составляет $29 - 5 = 24$ года.

Известно, что сейчас дочери в три раза меньше лет, чем отцу.



Следовательно, 24 года – это удвоенный возраст дочери. $24 : 2 = 12$ лет дочери, а отцу $12 \times 3 = 36$ лет.

Ответ 36.



Олимпиада по математике 6 – 7 класс



1. Четырехзначное число записано цифрами 0,1,2,4. Найдите это число, если известно, что оно является квадратом целого числа.
2. **Кому пасти овец** (старинная задача).

У пятерых крестьян – Ивана, Петра, Якова, Михаила и Герасима было 10 овец. Не могли они найти пастуха, чтобы пасти овец, и говорит Иван остальным: «Будем, братцы, пасти овец по очереди – по столько дней, сколько каждый из нас имеет овец». По сколько дней должен каждый крестьянин пасти овец, если известно, что у Ивана в два раза меньше овец, чем у Петра, у Якова в два раза меньше, чем у Ивана; Михаил имеет овец в два раза больше, чем Яков, а Герасим – вчетверо меньше, чем Петр? Решив задачу, в ответ запишите, сколько дней должен пасти овец Иван.



3. **Далеко ли до деревни** (старинная задача).

Прохожий, догнавши другого, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?». Другой прихожий ответил: «Расстояние от деревни, от которой ты идешь равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если пройти еще две версты, то

тогда будет ровно посередине между деревнями». Сколько верст еще осталось идти первому прохожему?



4. В автобусе ехало не более 100 пассажиров, причем число сидящих было в два раза больше числа стоящих. На остановке вышли 4% всех пассажиров. Найдите число пассажиров оставшихся в автобусе.
5. Пятеро бегунов соревновались в международных соревнованиях. У них на футболках были написаны стартовые номера: 1,2,3,4,5. Все они финишировали на позициях, не соответствующих стартовым номерам, то есть: бегун под номером 1 пришел не первым, бегун под номером 2 пришел не вторым и так далее. Бегуны под номером 1 и 5 финишировали друг за другом, номера 3,4 и 5 финишировали друг за другом, причем номер 3 сразу перед номером 4, после номера 5. Номер 4 не стал победителем. Так кто же выиграл? В ответ запишите стартовый номер победителя.
6. В трех дачных домиках разного цвета находились дети. В домике голубого цвета детей было в четыре раза, а в домике желтого цвета – в три раза больше, чем, в домике красного цвета. Из одного из домиков трое детей ушли гулять, а остальные перешли поровну в домик желтого и другого цвета. Из какого домика ушли все дети? В ответ запишите номер правильного ответа.

1	Из желтого
2	Из красного
3	Из голубого

7. Найдите значение выражения:

$$\frac{27^3 \times 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \times 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \times 3^4}{6^4}$$

8. Веселый человек (старинная задача).

Веселый человек пришел в трактир с некоторой суммой денег и занял у содержателя трактира столько денег, сколько у себя имел. Из этой суммы истратил 1 рубль. С остатком пришел в другой трактир, где опять занял столько денег, сколько имел. В этом трактире снова истратил 1 рубль. Потом пришел в третий и четвертый трактиры и повторил то же самое. Наконец, когда вышел из четвертого трактира, не имел ничего. Сколько денег имел первоначально веселый человек?



Для справки.

Денежные единицы:

1 рубль = 100 копеек,

1 гривна = 10 копеек,

1 алтын = 3 копейки,

1 полушка = $\frac{1}{4}$ копейки.

В ответ записать номер верного ответа.

1	1 рубль
2	50 копеек и 2 полушки
3	93 копейки и 3 полушки



Решения и ответы:

1. Четырехзначное число записано цифрами 0,1,2,4. Найдите это число, если известно, что оно является квадратом целого числа.

Решение.

Как известно, многозначное число делится на четыре только тогда, когда последние две цифры числа образуют число, которое делится на четыре. Это возможно если число оканчивается на 20, 40, 24. Но оно является квадратом целого числа, а значит, оно не может иметь на конце один ноль, т.к. в противном случае оно делится на 10, но не делится на 100, чего быть не может.

С нуля число начинаться не может, следовательно, единственным возможным кандидатом остается число 1024. Проверка показывает, что это число является квадратом числа 32.

Ответ: 1024.

2. **Кому пасти овец** (старинная задача).

У пятерых крестьян – Ивана, Петра, Якова, Михаила и Герасима было 10 овец. Не могли они найти пастуха, чтобы пасти овец, и говорит Иван остальным: «Будем, братцы, пасти овец по очереди – по столько дней, сколько каждый из нас имеет овец». По сколько дней должен каждый крестьянин пасти овец, если известно, что у Ивана в два раза меньше овец, чем у Петра, у Якова в два раза меньше, чем у Ивана; Михаил имеет овец в два раза больше, чем Яков, а Герасим – вчетверо меньше, чем Петр? Решив задачу, в ответ запишите, сколько дней должен пасти овец Иван.



Решение.

Из условия следует, что у Ивана и Михаила вдвое больше овец, чем у Якова; у Петра вдвое больше овец, чем у Ивана, и, значит, вчетверо раз больше, чем у Якова. Но тогда у Герасима столько же овец, сколько имеет их Яков. Общее число овец, поэтому в $2+4+1+2+1=10$ раз больше, чем число овец у Якова. Отсюда следует, что у Якова 1 овца, тогда у Ивана и Михаила по две овцы, у Петра четыре и у Герасима одна овца. Соответственно столько же дней должен пасти овец каждый из них. Значит, Иван должен пасти овец 2 дня.

Ответ: 2.**3. Далеко ли до деревни (старинная задача).**

Прохожий, догнавши другого прохожего, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?». Другой прохожий ответил: «Расстояние от деревни, от которой ты идешь равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если пройти еще две версты, то тогда будет ровно посередине между деревнями». Сколько верст еще осталось идти первому прохожему?

**Решение.**

До середины прохожему надо пройти 2 версты, и это составляет $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ всего расстояния между деревнями. Поэтому расстояние между деревнями равно 12 верстам, к моменту встрече первый прохожий прошел треть пути, т.е. $12 \times \frac{1}{3} = 4$ версты и осталось ему идти 8 верст.

Ответ: 8.

4. В автобусе ехало не более 100 пассажиров, причем число сидящих было в два раза больше числа стоящих. На остановке вышли 4% всех пассажиров. Найдите число пассажиров оставшихся в автобусе.

Решение.

4% от 100 составляет 4 пассажира, следовательно, на остановке вышло не более 4 пассажиров. 4% составляет одну двадцать пятую часть числа, следовательно, количество пассажиров, которые ехали в автобусе, делится на 25. Среди натуральных чисел, не превышающих 100, есть только четыре числа, которые делятся на 25 без остатка: 25, 50, 75, 100. В условии задачи сказано, что число сидящих было в два раза больше числа стоящих, следовательно, количество пассажиров, которые ехали в автобусе, делится на 3. Из указанных нами в решении чисел на 3 делится только число 75. А поскольку 4% от 75 – это число 3, то из автобуса на остановке вышло 3 пассажира. Следовательно, в автобусе осталось 72 пассажира.

Ответ: 72.

5. Пятеро бегунов соревновались в международных соревнованиях. У них на футболках были написаны номера: 1,2,3,4,5. Все они финишировали на позициях, не соответствующих стартовым номерам, то есть: бегун под номером 1 пришел не первым, бегун под номером 2 пришел не вторым и так далее. Бегуны под номером 1 и 5 финишировали друг за другом, номера 3,4 и 5 финишировали друг за другом, причем номер 3 сразу перед номером 4, после номера 5. Номер 4 не стал победителем. Так кто же выиграл? В ответ запишите стартовый номер победителя.



Решение.

Бегуны под номером 1 и 5 финишировали друг за другом, но бегун под номером 1 пришел не первым, а бегун под номером 5 не последним. Значит, возможны два случая:

1	2	3	4	5
	№1	№5		

1	2	3	4	5
		№1	№5	

Кроме того сказано, что номер 3 пришел сразу после номера 5, то есть возможно два варианта:

1	2	3	4	5
	№1	№5	№3	

1	2	3	4	5
		№1	№5	№3

Бегун под номером 4, не выиграл гонку, значит, возможно:

1	2	3	4	5
	№1	№5	№3	№4

1	2	3	4	5
	№4	№1	№5	№3

В обоих случаях для бегуна под номером 2 остается лишь первая позиция. Победил участник под номером 2.

Ответ: 2.

6. В трех дачных домиках разного цвета находились дети. В домике голубого цвета детей было в четыре раза, а в домике желтого цвета – в три раза больше, чем, в домике красного цвета. Из одного из домиков трое детей ушли гулять, а остальные перешли поровну в домик желтого и другого цвета.

Из какого домика ушли все дети? В ответ запишите номер правильного ответа.

1	Из желтого
2	Из красного
3	Из голубого

Решение.

Из условия задачи, т.к. дети перешли поровну в домик желтого и другого цвета, следует, что из желтого домика никто не уходил.

Из голубого домика дети не могли уйти, т.к. в домике голубого цвета детей было в четыре раза больше детей, чем в красном домике, а, значит, их было четное количество, и при уходе троих детей осталось нечетное число детей, и уйти поровну в два домика они бы не смогли.

Следовательно, дети ушли из красного домика.

Ответ: 2.

7. Найдите значение выражения:

$$\frac{27^3 \times 4^5}{6^4} - \frac{5^5 \times 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \times 3^4}{6^4}$$

Решение.

Разложим основания степеней на простые множители и выполним сокращение дробей:

$$\frac{27^3 \times 4^5}{6^8} - \frac{5^5 \times 2^4}{10^4} - \frac{2^6 \times 3^4}{6^4} = i$$

$$\frac{3^9 \times 2^{10}}{3^8 \times 2^8} - \frac{5^5 \times 2^4}{5^4 \times 2^4} - \frac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^4} = i$$

$$i \ 3 \times 2^2 - 5 - 2^2 = 12 - 5 - 4 = 3$$

Ответ: 3.

8. **Веселый человек** (старинная задача).

Веселый человек пришел в трактир с некоторой суммой денег и занял у содержателя трактира столько денег, сколько у себя имел. Из этой суммы истратил 1 рубль. С остатком пришел в другой трактир, где опять занял столько денег, сколько имел. В этом трактире снова истратил 1 рубль. Потом пришел в третий и четвертый трактиры и повторил то же самое. Наконец, когда вышел из четвертого трактира, не имел ничего. Сколько денег имел первоначально веселый человек?



Для справки.

Денежные единицы:

1 рубль = 100 копеек,

1 гривна = 10 копеек,

1 алтын = 3 копейки,

1 полушка = $\frac{1}{4}$ копейки.

В ответ записать номер верного ответа.

1	1 рубль
2	50 копеек и 2 полушки
3	93 копейки и 3 полушки
4	1 рубль 50 копеек и 3 полушки.

Решение.

Применим обратный ход.

Так как после выхода из четвертого трактира у человека не осталось денег, то после ухода из третьего трактира он имел 50 копеек. В третьем трактире он истратил один рубль, перед этим он занял столько денег, сколько имел, поэтому после ухода из второго трактира он имел половину от 1 рубля 50 копеек, т.е. 75 копеек. Аналогично, после выхода из первого трактира у человека имелось половина от 175 копеек. $175:2=87,5$ копеек. Значит, он пришел в первый трактир, имея $(87,5+10):2=93\frac{3}{4}$ копеек, т.е. 93 копейки и 3 полушки.

Ответ: 3



Олимпиада по математике 8 – 9 класс



1. **Далеко ли до деревни** (старинная задача).



Прохожий, догнавши другого прохожего, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?». Другой прохожий ответил: «Расстояние от деревни, от которой ты идешь равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если пройти еще две версты, то тогда будет ровно посередине между деревнями». Сколько верст еще осталось идти первому прохожему?

2. В автобусе ехало не более 100 пассажиров, причем число сидящих было в два раза больше числа стоящих. На остановке вышли 4% всех пассажиров. Найдите число пассажиров оставшихся в автобусе.
3. Решив уравнение $x^2+2x+a+2=0$ относительно переменной x , определите, при каком значении параметра уравнение имеет единственное решение, найдите это решение. В ответ запишите номер правильного ответа.

ОЦ им. С.Н.Олехника

1	$a=1, x=1.$
2	$a=-2, x=-2.$
3	$a=-1, x=-1.$
4	$a=-2, x=-1.$

4. Найти значение выражения.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит его две другие стороны. В ответ запишите номер правильного ответа.

1	2:1
2	$(\sqrt{2}-1):1$
3	3:2
4	<i>делит пополам</i>

6. Сравнить 80^{13} и 10^{26} . В ответ записать номер правильного ответа.

1	$80^{13} > 10^{26}$
2	$80^{13} < 10^{26}$
3	$80^{13} = 10^{26}$
4	Определить не возможно

7. Проторговался ли купец (старинная задача)?



ОЦ им. С.Н.Олехника

Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал ему, что за коня запрошена слишком большая цена. «Хорошо, - ответил продавец, - если ты говоришь, что конь слишком дорого стоит, то возьми себе его даром, а заплати мне только за одни гвозди в его подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку, за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь – четыре полушки, и так далее за все гвозди: за каждый следующий в два раза больше, чем за предыдущий». Купец подумав, что заплатит на много меньше, чем 1000 рублей, согласился. Определите, на сколько, проторговался купец. Ответ дайте в рублях, округлив результат до целых.

Для справки.

Денежные единицы:

1 рубль = 100 копеек,

1 гривна = 10 копеек,

1 алтын = 3 копейки,

1 полушка = $\frac{1}{4}$ копейки.

8. Четыре студента Антон, Борис, Виктор, Георгий, каждый со своей сестрой, пришли играть в волейбол на песке. Каждый юноша и девушка в паре против юноши и девушки в другой паре. Таня и Антон играли против Кати, бывшей в одной паре с братом Жанны. Аня играла с братом Кати; сестра Виктора играла в паре с Борисом, а Виктор играл в паре с сестрой Антона. Определите сестер каждого из юношей, и определите, кто с кем играл в паре в волейбол на песке. В ответ запишите номера верных утверждений без пробелов и запятых.

1	Жанна – сестра Бориса.
2	Георгий – не брат Тани.
3	Катя играла вместе с Борисом.

ОЦ им. С.Н.Олехника

4	Георгий и Жанна играли против Анны и Антона.
5	Виктор – брат Кати.



Решения и ответы:

1. **Далеко ли до деревни** (старинная задача).



Прохожий, догнавши другого прохожего, спросил: «Как далеко до деревни, которая у нас впереди?». Другой прихожий ответил: «Расстояние от деревни, от которой ты идешь равно третьей части всего расстояния между деревнями, а если пройти еще две версты, то тогда будет ровно посередине между деревнями». Сколько верст еще осталось идти первому прохожему?

Решение.

До середины прохожему надо пройти 2 версты, и это составляет $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ всего расстояния между деревнями. Поэтому расстояние между деревнями равно 12 верстам, к моменту встречи первый прохожий прошел треть пути, т.е. $12 \times \frac{1}{3} = 4$ версты и осталось ему идти 8 верст.

Ответ: 8.

ОЦ им. С.Н.Олехника

2. В автобусе ехало не более 100 пассажиров, причем число сидящих было в два раза больше числа стоящих. На остановке вышли 4% всех пассажиров. Найдите число пассажиров оставшихся в автобусе.

Решение:

4% от 100 составляет 4 пассажира, следовательно, на остановке вышло не более 4 пассажиров. 4% составляет одну двадцать пятую часть числа, следовательно, количество пассажиров, которые ехали в автобусе, делится на 25. Среди натуральных чисел, не превышающих 100, есть только четыре числа, которые делятся на 25 без остатка: 25, 50, 75, 100. В условии задачи сказано, что число сидящих было в два раза больше числа стоящих, следовательно, количество пассажиров, которые ехали в автобусе, делится на 3. Из указанных нами в решении чисел на 3 делится только число 75. А поскольку 4% от 75 – это число 3, то из автобуса на остановке вышло 3 пассажира. Следовательно, в автобусе осталось 72 пассажира.

Ответ: 72.

3. Решив уравнение $x^2+2x+a+2=0$ относительно переменной x , определите, при каком значении параметра уравнение имеет единственное решение, найдите это решение. В ответ запишите номер правильного ответа.

1	$a=1, x=1.$
2	$a=-2, x=-2.$
3	$a=-1, x=-1.$
4	$a=-2, x=-1.$

Решение:

Так, как коэффициент при x^2 равен 1, а, значит, не равен нулю, то это уравнение квадратное.

Найдем его дискриминант:

$$D=4-4(a+2)=-4a-4=-4(a+1)$$

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта.

ОЦ им. С.Н.Олехника

- Если $D > 0$, т.е. $-4(a+1) > 0$, то при $a < -1$ уравнение будет иметь два различных корня: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4(a+1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{-a-1}$.
- Если $D = 0$, т.е. $-4(a+1) = 0$, то при $a = -1$ уравнение будет иметь единственный корень $x = -1$.
- Если $D < 0$, т.е. $-4(a+1) < 0$, то при $a > -1$ уравнение не будет иметь корней.

Ответ: 3.

4. Найти значение выражения.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$$

Решение.

До множим числитель и знаменатель каждой дроби на сопряженную знаменателю величину.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}} = i$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})} = i$$

$$i \frac{\sqrt{2}-1}{1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1} + \dots + \frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{1} = -1 + \sqrt{100} = 10 - 1 = 9$$

Ответ: 9.

5. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, делит его площадь пополам. В каком отношении она делит его две другие стороны. В ответ запишите номер правильного ответа.

ОЦ им. С.Н.Олехника

1	2:1
2	$(\sqrt{2}-1):1$
3	3:2
4	делит пополам

Решение.

По условию $S_{ABC} = 2S_{MBN}$

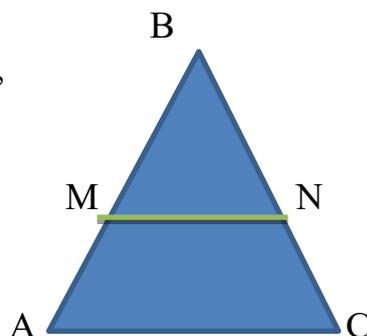
Треугольники ABC и MBN подобны,

Коэффициент подобия равен $\sqrt{2}$.

$$AB = MB \sqrt{2};$$

$$AM = AB - MB = \sqrt{2} MB - MB = (\sqrt{2} - 1) MB;$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB} = (\sqrt{2} - 1):1$$



Ответ: 2.

6. Сравнить 80^{13} и 10^{26} . В ответ запишите номер правильного ответа.

1	$80^{13} > 10^{26}$
2	$80^{13} < 10^{26}$
3	$80^{13} = 10^{26}$
4	Определить не возможно

Решение.

Сделаем оценку для первого выражения.

$$80^{13} < 81^{13} = (9^2)^{13} = 9^{26}. \text{ Но тогда, т.к. } 9^{26} < 10^{26}, 80^{13} < 10^{26}.$$

Ответ: 2.

7. Проторговался ли купец (старинная задача)?

ОЦ им. С.Н.Олехника



Некто продавал коня и просил за него 1000 рублей. Купец сказал ему, что за коня запрошена слишком большая цена. «Хорошо, - ответил продавец, - если ты говоришь, что конь слишком дорого стоит, то возьми себе его даром, а заплати мне только за одни гвозди в его подковах. А гвоздей во всякой подкове по 6 штук. И будешь ты мне за них платить таким образом: за первый гвоздь полушку, за второй гвоздь заплатишь две полушки, за третий гвоздь – четыре полушки, и так далее за все гвозди: за каждый следующий в два раза больше, чем за предыдущий». Купец подумав, что заплатит на много меньше, чем 1000 рублей, согласился. Определите, на сколько, проторговался купец. Ответ дайте в рублях, округлив результат до целых.

Для справки.

Денежные единицы:

1 рубль = 100 копеек,

1 гривна = 10 копеек,

1 алтын = 3 копейки,

1 полушка = $\frac{1}{4}$ копейки.

Решение:

Всего гвоздей $6 \times 4 = 24$. За все гвозди купец должен заплатить $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{23}$ полушек.

Для нахождения этой суммы можно воспользоваться следующим приемом: помножим эту сумму на $(2-1)$.

ОЦ им. С.Н.Олехника

$(1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{23}) \times (2-1) = 2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{24} - (1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{23}) = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^4 - 1 = 1024 \times 1024 \times 16 - 1 = 16777215$ полушек, или 41943 рубля и 15 полушек. Следовательно, купец должен заплатить 41943 рубля и 15 полушек вместо 1000 рублей.
41943 рубля и 15 полушек - 1000 рубля = 40943 рубля.

На таких условиях не обидно и лошадь дать в придачу.

Примечание. Те, кто уже изучил тему "Геометрическая прогрессия» могут использовать готовые формулы.

Ответ: 40943.

8. Четыре студента Антон, Борис, Виктор, Георгий, каждый со своей сестрой, пришли играть в волейбол на песке. Каждый юноша и девушка в паре против юноши и девушки в другой паре.

(1) Таня и Антон играли против (2) Кати, бывшей в одной паре с братом Жанны. (3) Аня играла с братом Кати; (4) сестра Виктора играла в паре с Борисом, а (5) Виктор играл в паре с сестрой Антона. Определите сестер каждого из юношей, и определите, кто с кем играл в паре в волейбол на песке. В ответ запишите номера верных утверждений без пробелов и запятых.

1	Жанна – сестра Бориса.
2	Георгий – не брат Тани.
3	Катя играла вместе с Борисом.
4	Георгий и Жанна играли против <u>Анны</u> и Антона.
5	Виктор - брат Кати.

Решение.

Пронумеруем утверждения, как показано в тексте.

1 шаг.

- Из (1) – (2) → Антон - не брат Жанны.
- Из (1) – (3) → Антон - не брат Кати.
- Из (1) – (5) → Антон - не брат Тани.

Следовательно, **Антон - брат Ани.**

2 шаг.

ОЦ им. С.Н.Олехника

Из 1 шага (Антон - брат Ани) и из (5) (Виктор играл в паре с сестрой Антона) → **Виктор играл с Аней.**

3 шаг.

Составим таблицу игравших пар:

	Катя	Таня	Жанна	Анна
Антон	-	+	-	-
Борис		-		-
Виктор	-	-	-	+
Георгий		-		-

Из таблицы видно, что Борис и Георгий, соответственно, играли либо с Катей, либо с Жанной.

4 шаг.

Из 2 шага (Виктор играл с Аней), (3) (Аня играла с братом Кати) → **Виктор - брат Кати.** → Катя – сестра Виктора, но (4) сестра Виктора играла в паре с Борисом. → **Борис играл с Катей.**

Получаем таблицу игравших пар:

	Катя	Таня	Жанна	Анна
Антон	-	+	-	-
Борис	+	-	-	-
Виктор	-	-	-	+
Георгий	-	-	+	-

Осталось составить таблицу по степени родства:

Брат	Сестра
Антон	Аня (1 шаг)
Борис	Жанна (из (2) и табл. игр. пар)
Виктор	Катя (4 шаг)
Георгий	Таня (методом исключения)

Осталось выбрать верные рассуждения.

Ответ: 135.